ODR I. Cvičení 6.

Řešte pomocí maticových exponenciál.

1. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = 6x + 7y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = y. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x' = -y - t, \quad x(0) = 1, \\ y' = x + t, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

4. Najděte soustavu takovou, že $(x(t), y(t)) = (\sinh(t), e^t)$ je řešení.

5. Které z následujících funkcí

   (a) $(3e^t + e^{-t}, e^{3t})$, (c) $(3e^t + e^{-t}, te^t)$, (e) $(e^t + 2e^{-t}, e^t + 2e^{-t})$
   (b) $(3e^t + e^{-t}, e^t)$, (d) $(3e^t, t^2e^t)$,

   mohou být řešením autonomního homogenního systému prvního řádu?

6. Funkce $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje $u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$ a $u''(t) \geq -u(t)$ pro všechna $t \in [0, \pi]$. Ukažte, že $u(t) \geq \sin(t)$ pro všechna $t \in [0, \pi]$.

   Rada. Uvažujte rovnice $u'' + u = f$.

7. Existuje-li reálná matice A taková, že

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta > 0?$$

   Rada. Zvažte případy $\alpha = \beta$ a $\alpha \neq \beta$. Použijte, že $\sigma(\exp(A)) = \exp(\sigma(A))$, a zvažte $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

8. Najděte exponenciály následujícíh matic

   (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 10 & -13 & 6 & -19 \\ -3 & 7 & -2 & 7 \\ 5 & -8 & 6 & -12 \\ 7 & -11 & 6 & -15 \end{pmatrix}$.

ODR I. Cvičení 6.

Řešte pomocí maticových exponenciál.

1. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = 6x + 7y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = y. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x' = -y - t, \quad x(0) = 1, \\ y' = x + t, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

4. Najděte soustavu takovou, že $(x(t), y(t)) = (\sinh(t), e^t)$ je řešení.

5. Které z následujících funkcí

   (a) $(3e^t + e^{-t}, e^{3t})$, (c) $(3e^t + e^{-t}, te^t)$, (e) $(e^t + 2e^{-t}, e^t + 2e^{-t})$
   (b) $(3e^t + e^{-t}, e^t)$, (d) $(3e^t, t^2e^t)$,

   mohou být řešením autonomního homogenního systému prvního řádu?

6. Funkce $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje $u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$ a $u''(t) \geq -u(t)$ pro všechna $t \in [0, \pi]$. Ukažte, že $u(t) \geq \sin(t)$ pro všechna $t \in [0, \pi]$.

   Rada. Uvažujte rovnice $u'' + u = f$.

7. Existuje-li reálná matice A taková, že

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta > 0?$$

   Rada. Zvažte případy $\alpha = \beta$ a $\alpha \neq \beta$. Použijte, že $\sigma(\exp(A)) = \exp(\sigma(A))$, a zvažte $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

8. Najděte exponenciály následujícíh matic

   (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 10 & -13 & 6 & -19 \\ -3 & 7 & -2 & 7 \\ 5 & -8 & 6 & -12 \\ 7 & -11 & 6 & -15 \end{pmatrix}$.